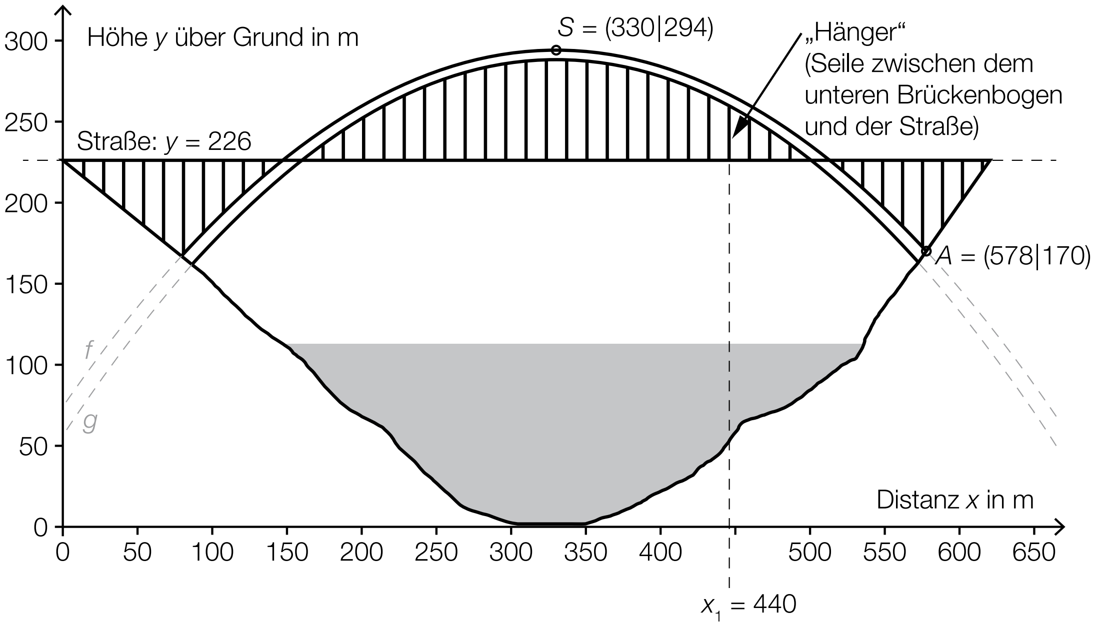
Wushan-Brücke

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt.



Die obige Abbildung stellt modellhaft die Wushan-Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f.

a) 1) Stellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f auf.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \quad \text{mit} \quad 86 \leq x \leq 574$

1) Berechnen Sie die Länge des „Hängers" an der Stelle $x_1 = 440$ m.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m/s von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe des Steins über Grund näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g … Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s^2)

1) Berechnen Sie die Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.
2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion v für die Geschwindigkeit des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t auf.

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(330) = 294 \Rightarrow 330^2 \cdot a + 330 \cdot b + c = 294$
$f(578) = 170 \Rightarrow 578^2 \cdot a + 578 \cdot b + c = 170$
$f'(330) = 0 \Rightarrow 660 \cdot a + b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{496} = -0{,}0020\ldots,\ b = \frac{165}{124} = 1{,}3306\ldots,\ c = \frac{9231}{124} = 74{,}4435\ldots$

$f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$

b1) $g(440) - 226 = 36{,}25\ldots$
Die Länge des „Hängers" beträgt rund 36,3 m.

c1) $113 = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t_a = 4{,}317\ldots$ (oder $t_a = -5{,}336\ldots$)
Der Stein benötigt bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche rund 4,32 s.

c2) $v(t) = |h'(t)|$
$v(t) = g \cdot t + 5$

$v(t)$ … Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

(Eine Angabe der Geschwindigkeit mit negativem Vorzeichen, also $v(t) = -g \cdot t - 5$, ist ebenfalls möglich.)