Süßwarenproduktion

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x … Produktionsmenge in ME
$K_A(x)$ … Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE
$K_B(x)$ … Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

Für K_A gilt:
$K_A(x) = 0{,}0001 \cdot x^2 + 0{,}17 \cdot x + 200$

Für K_B gilt:
K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x + b$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.

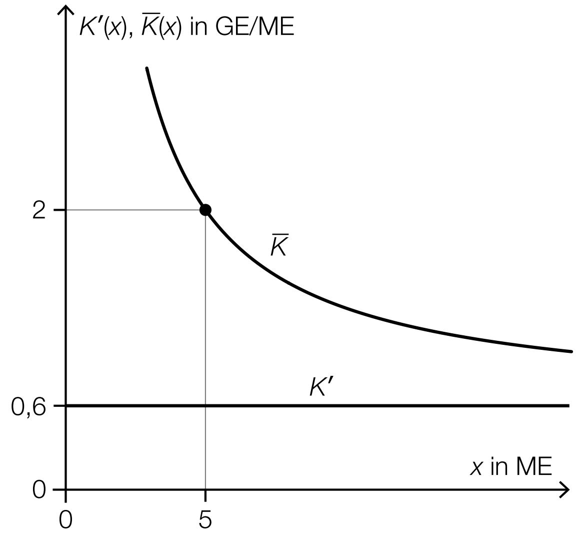


Abbildung 1

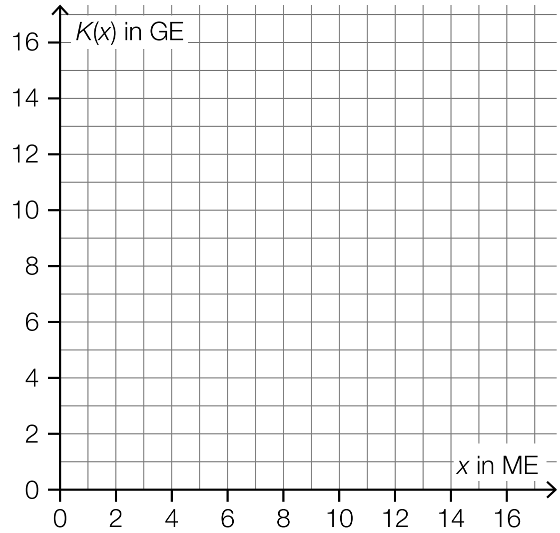


Abbildung 2

1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

a = __________ GE/ME *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}0003 \cdot x^3 - 0{,}017 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 40$
$E(x) = 1{,}5 \cdot x$

x … produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0003 \cdot x^2 - 0{,}017 \cdot x + 0{,}4 + \frac{40}{x}$$

$$0{,}0006 \cdot x - 0{,}017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52{,}5$$

3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Süßwarenproduktion

a1) Wenn $K_A(x_1) = K_B(x_1)$ gilt, dann gilt auch $\frac{K_A(x_1)}{x_1} = \frac{K_B(x_1)}{x_1}$, daher sind die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch.

a2) $K_B(x) = 0{,}3 \cdot x + 260$

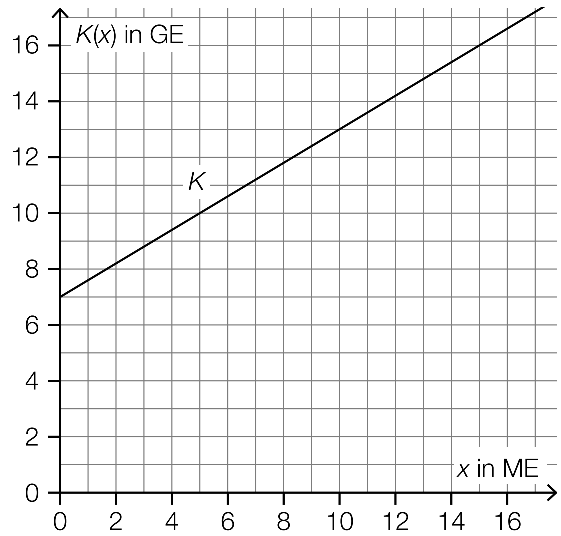
a3) $K_A'(x) = K_B'(x)$ *oder* $0{,}0002 \cdot x + 0{,}17 = 0{,}3$
$x = 650$

Bei einer Produktion von 650 ME sind die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K_B.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

b1) $a = 0{,}6$ GE/ME

b2)



b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von a.
b2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion K.

c1) $G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = -0{,}0003 \cdot x^3 + 0{,}017 \cdot x^2 + 1{,}1 \cdot x - 40$

c2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0009 \cdot x^2 + 0{,}034 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 58{,}62\ldots$ ($x_2 = -20{,}84\ldots$)
$G(58{,}62\ldots) = 22{,}46\ldots$

Der maximale Gewinn beträgt rund 22,5 GE.

c3) Das Betriebsoptimum bei der Produktion von Schokolinsen liegt bei rund 52,5 ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *G*.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Gewinns.
c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.