Sparkonto

Aufgabennummer: B_120		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.
Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KESt mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$K = 500 \cdot \frac{1{,}01125^t - 1}{0{,}01125}$$

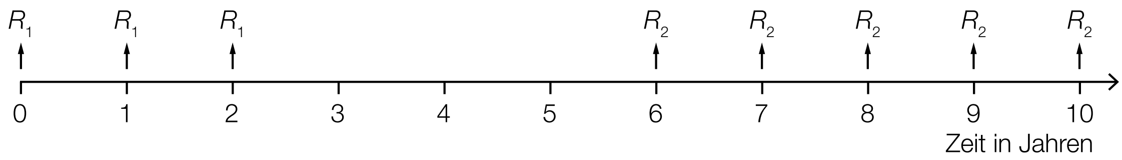
K ... Kapital in Euro (€)
t ... Zeit in Jahren

– Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
– Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p. a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.

– Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
– Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

c) Karin tätigt die in der nachstehenden Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



– Beschreiben Sie den dargestellten Sachverhalt in Worten.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Wert B aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem Jahreszinssatz i aus.

B = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$E = K$,
$n = t$,
$R = € \ 500$,
$q = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:

$$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}012}$$

$$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10\,000$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 51{,}3...$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

$$\text{Restbetrag} = 10\,000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62{,}257...$$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

c) Karin hebt zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 ab. Im Jahr 4 und im Jahr 5 wird nichts abgehoben.
Ab dem 6. Jahr hebt Karin 5-mal jeweils am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

$$B = R_1 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^2} + R_2 \cdot \frac{(1 + i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^{10}}$$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –