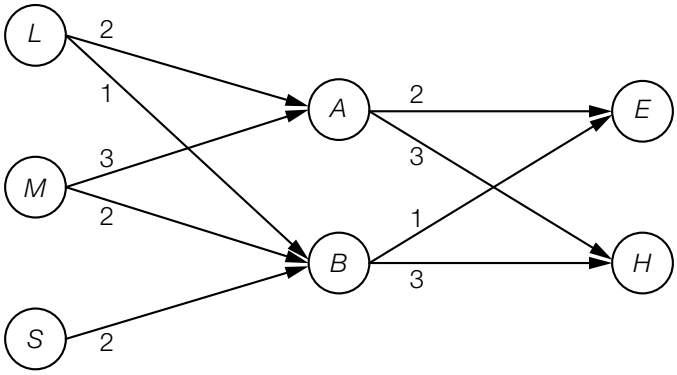
Seminarprüfungen

a) An einer Universität stellt eine Professorin Prüfungen für ihre Seminare zusammen. Dabei verwendet sie jede Prüfungsfrage nur ein Mal.
Sie teilt ihre Prüfungsfragen in drei Kategorien ein: leicht (*L*), mittel (*M*), schwierig (*S*).
Sie kombiniert die Prüfungsfragen in unterschiedlicher Anzahl für Prüfungen der Niveaustufen *A* und *B*. In ihren Einführungsseminaren (*E*) und Hauptseminaren (*H*) gibt es jeweils unterschiedlich viele Prüfungen der Niveaustufen *A* und *B*.
Die entsprechenden Zahlen können dem nachstehenden Gozinto-Graphen entnommen werden.



In diesem Gozinto-Graphen existiert kein Pfeil von *S* nach *A*.

1) Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im gegebenen Sachzusammenhang. *[0 / 1 P.]*

Die Matrix $\boldsymbol{V_1}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungsfragen für die unterschiedlichen Prüfungen der Niveaustufen *A* und *B*.
Die Matrix $\boldsymbol{V_2}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungen der Niveaustufen *A* und *B* für die unterschiedlichen Seminare.

2) Ermitteln Sie die beiden Matrizen $\boldsymbol{V_1}$ und $\boldsymbol{V_2}$. *[0 / 1 P.]*

Die Professorin hält im aktuellen Semester 4 Einführungsseminare (*E*) und 2 Hauptseminare (*H*). Der Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ beschreibt den Bedarf an leichten, mittleren und schwierigen Prüfungsfragen für diese Seminare.

3) Berechnen Sie den Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$. *[0 / 1 P.]*

Die Professorin benötigt für die Vorbereitung der Prüfungsfragen unterschiedlich viel Zeit:
t_1 Minuten für eine leichte, t_2 Minuten für eine mittlere und t_3 Minuten für eine schwierige Prüfungsfrage. Die insgesamt für alle Prüfungsfragen des aktuellen Semesters benötigte Vorbereitungszeit wird mit *t* bezeichnet.

4) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von *t* auf. Verwenden Sie dabei t_1, t_2 und t_3 sowie den Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$.

$t =$ _____ *[0 / 1 P.]*

b) Über die Matrizen $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ weiß man:

$\boldsymbol{R}$ ist eine 3×3-Matrix.
$\boldsymbol{S}$ ist eine 2×3-Matrix.
$\boldsymbol{T}$ ist eine 3×2-Matrix.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0 / 1 P.]*

$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×2-Matrix.	☐
$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{T}$ ist eine 2×3-Matrix.	☐
$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×3-Matrix.	☐
$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}$ ist eine 3×2-Matrix.	☐
$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}$ ist eine 3×3-Matrix.	☐

c) Eine Kommission untersucht die Ergebnisse mehrerer Prüfungen. Dabei wird beim Prüfungsergebnis zwischen „positiv“ und „negativ“, beim Geschlecht der Studierenden zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.
In der nachstehenden Vierfeldertafel sind die relativen Häufigkeiten für eine bestimmte Prüfung angegeben.

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38		0,72
negativ			0,28
Summe	0,58	0,42	1

1) Ergänzen Sie die leeren Felder der obigen Vierfeldertafel. *[0 / 1 P.]*

Von den Studierenden wird eine Person zufällig ausgewählt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist, wenn bekannt ist, dass die Person ein negatives Prüfungsergebnis hat. *[0 / 1 P.]*

Bei einer anderen Prüfung geht die Kommission von einer (stochastischen) Unabhängigkeit zwischen dem Prüfungsergebnis und dem Geschlecht aus.

3) Ergänzen Sie unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Vierfeldertafel. *[0 / 1 P.]*

	männlich	weiblich	Summe
positiv			0,80
negativ			0,20
Summe	0,55	0,45	1

Möglicher Lösungsweg

Seminarprüfungen

a1) Prüfungen der Niveaustufe *A* enthalten keine schwierigen Prüfungsfragen.

a2) $\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{V_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a3) $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{V_1} \cdot \boldsymbol{V_2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 15 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \\ 20 \end{pmatrix}$

a4) $t = (t_1 \;\; t_2 \;\; t_3) \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

oder:

$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$ (als Skalarprodukt)

oder:

$t = 38 \cdot t_1 + 62 \cdot t_2 + 20 \cdot t_3$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Matrizen $\boldsymbol{V_1}$ und $\boldsymbol{V_2}$.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$.
a4) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1)

$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×3-Matrix.	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38	**0,34**	0,72
negativ	**0,20**	**0,08**	0,28
Summe	0,58	0,42	1

c2) $P(\text{„männlich“} \mid \text{„negativ“}) = \frac{0{,}2}{0{,}28} = 0{,}714...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 71 %.

c3)

	männlich	weiblich	Summe
positiv	**0,44**	**0,36**	0,80
negativ	**0,11**	**0,09**	0,20
Summe	0,55	0,45	1

c1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 3 leeren Felder der Vierfeldertafel.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 4 fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel.