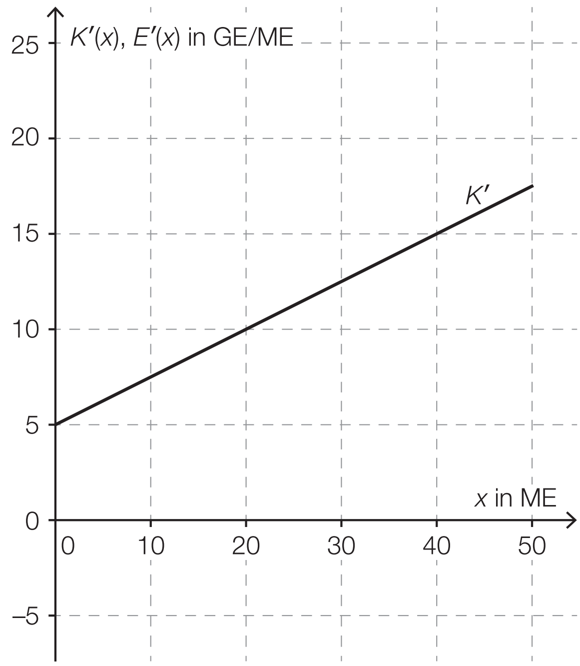
# Scharniere*

Aufgabennummer: B_503

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion $K'$ für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.




1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion $K'$.

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion $K$.

Die Grenzerlösfunktion $E'$ für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

$x$ ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge $x$ in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion $E'$ im Intervall [0; 50] ein.

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion $E'$ in Bezug auf den Erlös.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$
$x$ ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge $x$ in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$$

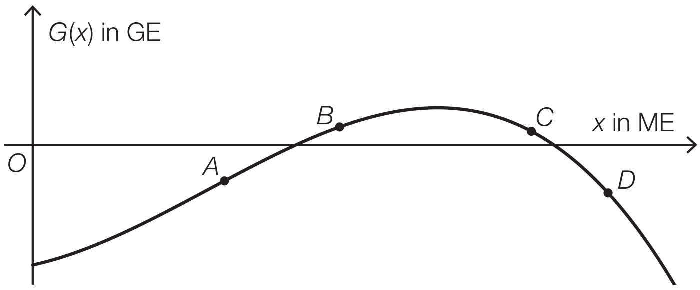
$$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$$

$$x_1 = 2\,, \quad (x_2 = -2)$$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion $G$ für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion $G$ sind die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ eingezeichnet.




1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

| | |
|---|---|
| $G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$ | |
| $G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$ | |

| | |
|---|---|
| A | Punkt $A$ |
| B | Punkt $B$ |
| C | Punkt $C$ |
| D | Punkt $D$ |

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion $G$ beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$

$x$ ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge $x$ in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

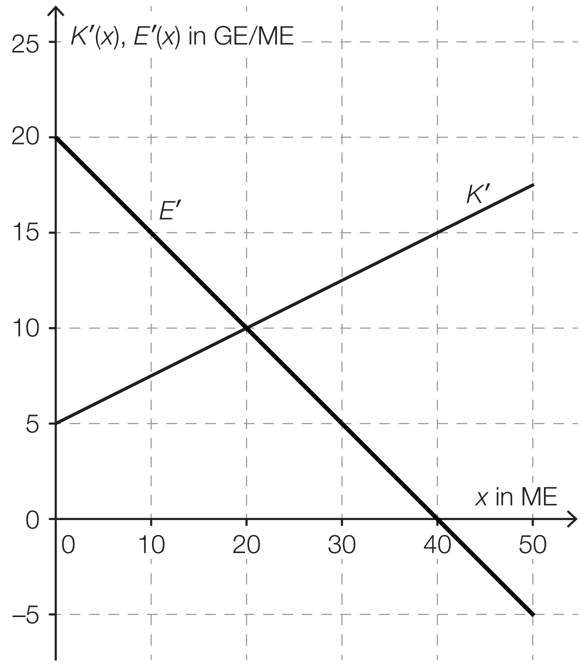
# Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 0{,}25 \cdot x + 5$
$x$ ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge $x$ in GE

a2) $K(x) = \int (0{,}25 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$

$K(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50$
$K(x) = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 50$

a3)




a4) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist diejenige Absatzmenge, bei der der Erlös maximal ist.

b1) Bei dieser Produktionsmenge handelt es sich um das Betriebsoptimum.

*oder:*

Bei dieser Produktionsmenge sind die Durchschnittskosten minimal.

b2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

c1)

| | |
|---|---|
| $G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$ | B |
| $G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$ | D |

| | |
|---|---|
| A | Punkt *A* |
| B | Punkt *B* |
| C | Punkt *C* |
| D | Punkt *D* |

d1) $G(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 13{,}48...$ $(x_2 = 27{,}83...;\ x_3 = -13{,}31...)$
Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 13,5 ME.

d2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}03 \cdot x^2 + 0{,}56 \cdot x + 1{,}75 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 21{,}39...$ $(x_2 = -2{,}72...)$
$G(21{,}39...) = 17{,}67...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 17,7 GE.

# Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Grenzkostenfunktion
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
a3) 1 × A3: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzerlösfunktion
a4) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Nullstelle der Grenzerlösfunktion in Bezug auf den Erlös
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × D: für das richtige Zeigen
c1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der unteren Gewinngrenze
d2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns