

Rücklage

Aufgabennummer: B_125

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.

Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.

Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann.
(Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.

- Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
- Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.
Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

- Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der äquivalente Monatszinssatz führt bei monatlicher Verzinsung innerhalb eines Jahres zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.

Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:

$$E = K_0 \cdot (1 + i)$$

Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:

$$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$$

Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$$

Aus diesem Ansatz lässt sich der äquivalente Monatszinssatz i_{12} berechnen.

- b) Martin bekommt bar € 22.500.

Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.

Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:

{375; 374,25; 373,5; ...}

Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500

$$\text{Lisa: } 375 \cdot \frac{1,002^{60} - 1}{0,002} \cdot \frac{1}{1,002^{59}} = 21\,224,8... \approx 21\,225$$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

- c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KEST:

$$2,5 \% \cdot 0,75 = 1,875 \%$$

$$22\,500 \cdot 1,01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

Lösung mittels Technologieinsatz: $q = 1,046457...$

Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KEST berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —