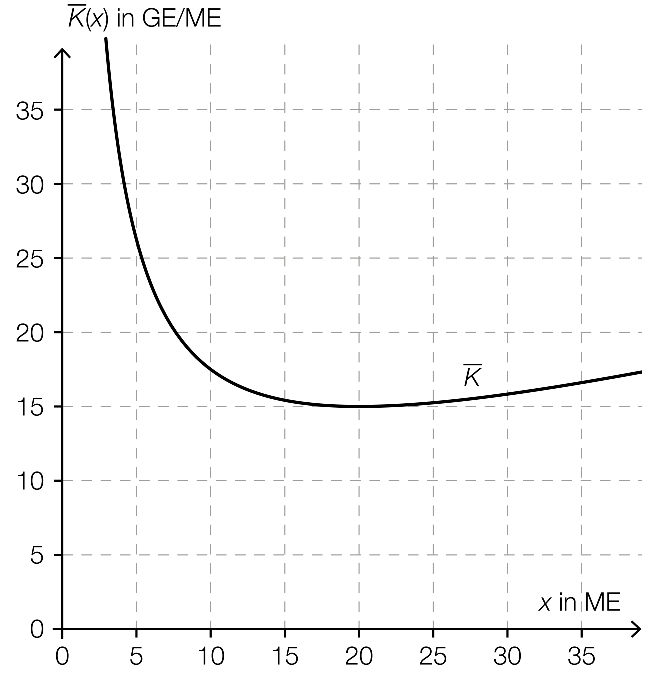
Lampenproduktion (1)*

Aufgabennummer: B_419

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

– Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
– Berechnen Sie die Fixkosten.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

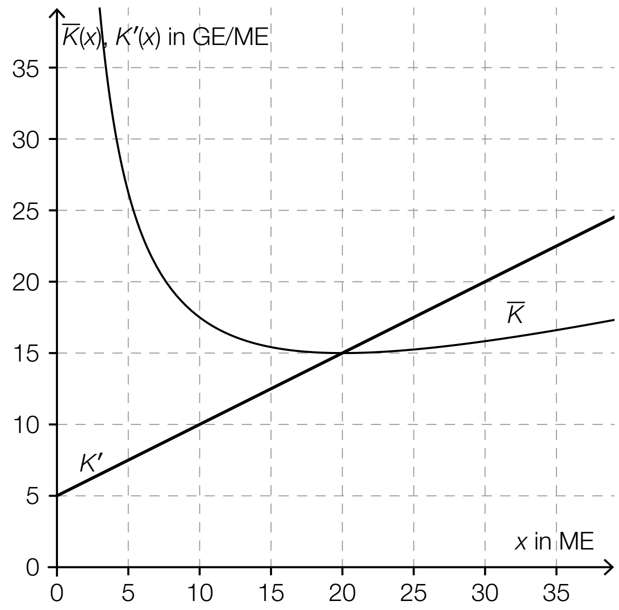
Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

– Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
– Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Betriebsoptimum: $x_{opt} = 20$ ME
Toleranzbereich: [18 ME; 22 ME]

$K(x) = \int (0{,}5 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x =$
$= 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(20) = 20 \cdot 15 = 300$
$300 = 0{,}25 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 + C$
$C = 100$

Die Fixkosten betragen 100 GE.

b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639...$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360...$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

c) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$\Rightarrow\ x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzkostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [18 ME; 22 ME]
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (ohne Berechnung der Integrationskonstanten)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Fixkosten

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung