Küchengerät

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

a) Die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts soll durch die beschränkte Wachstumsfunktion N_1 beschrieben werden.

$N_1(t) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_1(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück
S ... Sättigungsmenge in Stück
λ ... positiver Parameter

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $N_1(0) = 0$ *[0/1 P.]*

Die Sättigungsmenge beträgt 5000 Stück. Eine Woche nach Verkaufsbeginn wurden bereits 350 Stück verkauft.

2) Berechnen Sie λ. *[0/1 P.]*

Vereinfacht kann die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts für einen eingeschränkten Zeitraum auch durch die Funktion N_2 beschrieben werden.

$N_2(t) = 350 \cdot t$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_2(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

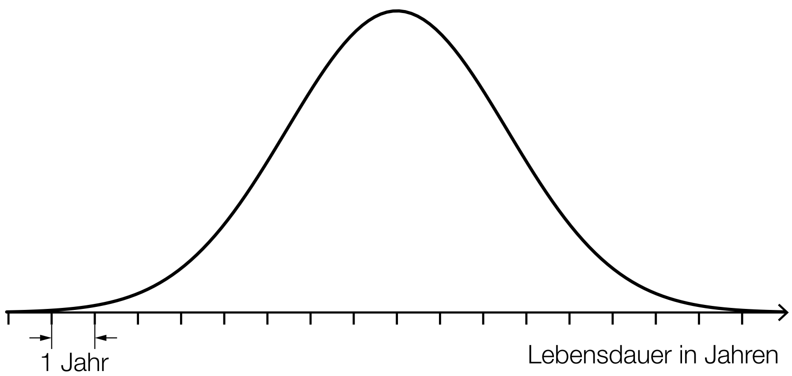
Jemand hat die Gleichungen $N_1(t) = N_2(t)$ und $N_1'(t) = N_2'(t)$ nach t gelöst.

3) Ordnen Sie den beiden Gleichungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$N_1(t) = N_2(t)$	
$N_1'(t) = N_2'(t)$	

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0; 1}.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall]0; 1[.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall [1; ∞[.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0}.

b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird. *[0/1 P.]*

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

x ... abgesetzte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_1(0) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 0}) = S \cdot (1 - 1) = 0$

a2) $S = 5000$

$N_1(1) = 350$ *oder* $5000 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = 350$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\lambda = -\ln(0{,}93) = 0{,}07257...$

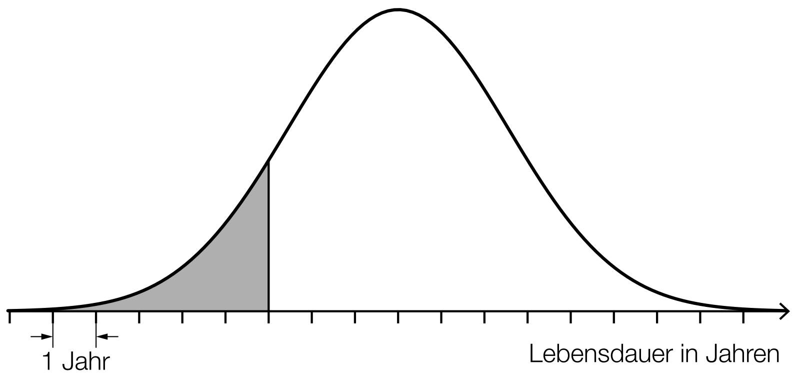
a3)

$N_1(t) = N_2(t)$	A
$N_1'(t) = N_2'(t)$	B

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0; 1}.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall]0; 1[.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall [1; ∞[.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0}.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von λ.
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1)



b2) X ... Lebensdauer in Jahren

$P(X \leq 7) = 0{,}12$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 2{,}55...$ Jahre

b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) $20 \cdot 1\,430 - 28\,000 = 600$

Der Gewinn beim Verkauf von 1 430 Stück beträgt 600 Euro, daher wird der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht.

c2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$p(x) = 64{,}7 \cdot e^{-0{,}00083 \cdot x}$ *(Parameter gerundet)*

c3) Die Sättigungsmenge ist die Nullstelle der Preis-Absatz-Funktion. Da hier ein exponentielles Modell gewählt wurde, gibt es keine Nullstelle.

c1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von *p*.
c3) Ein Punkt für das richtige Begründen.