Käseproduktion*

Aufgabennummer: B_468		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

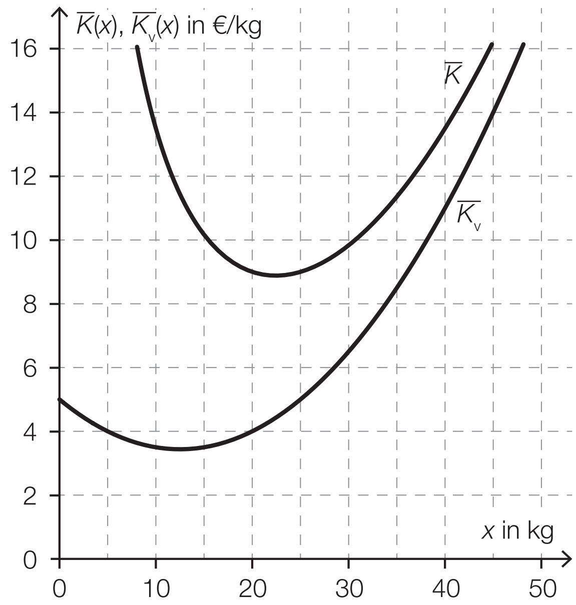
Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(x) = \int (0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + F$

$K(5) = 120$ *oder* $0{,}01 \cdot 5^3 - 0{,}25 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + F = 120 \quad \Rightarrow \quad F = 100$

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 100$

x ... Produktionsmenge in kg
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a2) $K''(x) = 0{,}06 \cdot x - 0{,}5$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8{,}33...$

Die Kostenkehre liegt bei rund 8,3 kg.

a3) Wird die Produktion von 5 kg auf 10 kg gesteigert, so nehmen die Gesamtkosten um durchschnittlich € 3 pro kg zu.

b1) Betriebsoptimum: 22 kg
Toleranzbereich: [21 kg; 23 kg]

b2) kurzfristige Preisuntergrenze: 3,40 €/kg
Toleranzbereich: [3,10 €/kg; 3,70 €/kg]

c1) $G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$G'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $G(5) = -35$
II: $G(25) = 200$
III: $G(30) = 215$
IV: $G'(30) = 0$

oder:

I: $5^3 \cdot a + 5^2 \cdot b + 5 \cdot c + d = -35$
II: $25^3 \cdot a + 25^2 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$
III: $30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d = 215$
IV: $3 \cdot 30^2 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b + c = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}01; \; b = 0{,}25; \; c = 12; \; d = -100$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (mit Integrationskonstante)
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
a3) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [21 kg; 23 kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen der kurzfristigen Preisuntergrenze im Toleranzbereich [3,10 €/kg; 3,70 €/kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zum Gewinn bei den Absatzmengen 5 kg, 25 kg und 30 kg
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Ableitungsfunktion G'
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten