BMB
Bundesministerium
für Bildung

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}115 \cdot x^2 + 5{,}2 \cdot x + 50$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
– Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

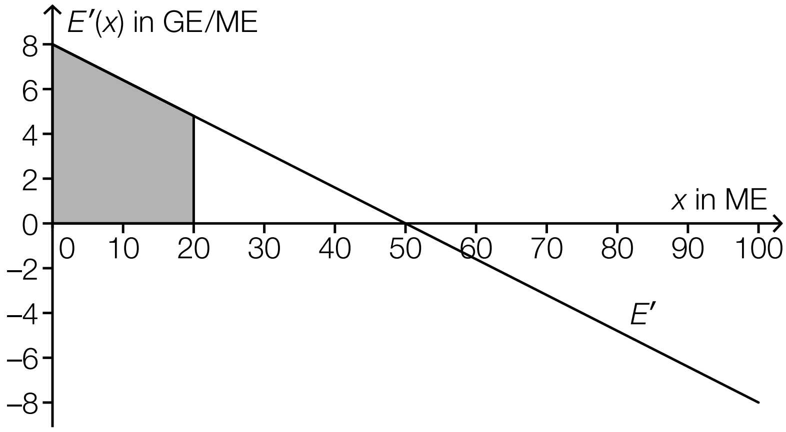
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



– Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$

$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.

Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate

1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten

1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion

1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit

1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang