

Grenzkosten*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

- a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

- Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

- b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$$K'(x) = 0,3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$$

x ... Anzahl der produzierten ME

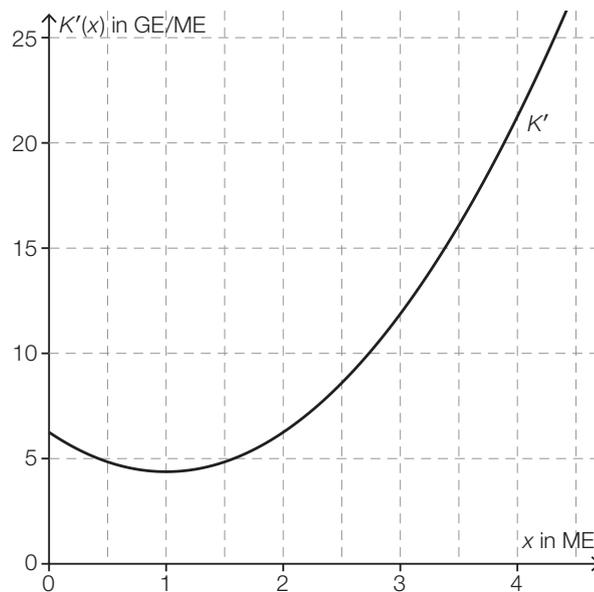
$K'(x)$... Grenzkosten bei x ME in GE/ME

- Berechnen Sie die Kostenkehre.

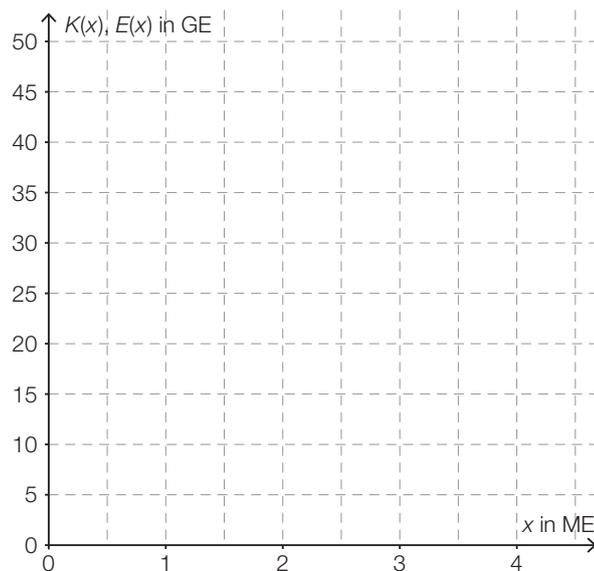
Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

- Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

- c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall $[0; 4]$ in der unten stehenden Abbildung ein.
- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall $[0; 4]$ in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Grenzkostenwert 1 060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1 060 GE führen wird.

$$K'(20) = 1\,060$$

$$K'(50) = 7\,120$$

$$K'(60) = 10\,340$$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$$

- b) $K''(x) = 0,6 \cdot x - 4$

$$0 = 0,6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6,7$$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

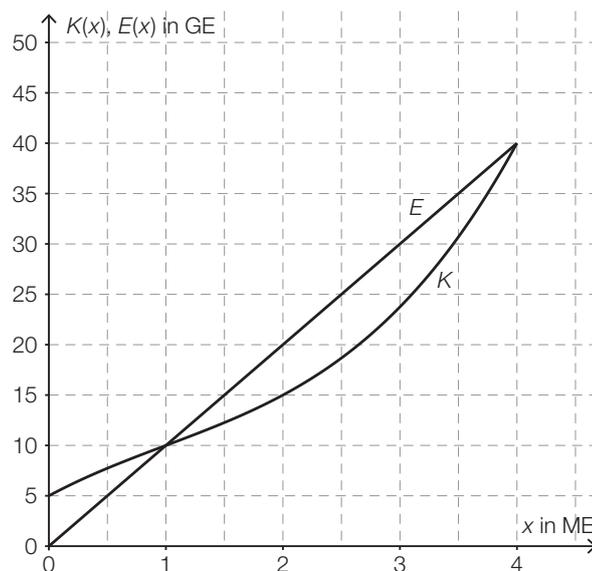
$$\int (0,3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15) dx = 0,1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$$

$$K(35) = 2\,372,50:$$

$$0,1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2\,372,50 \Rightarrow C = 10$$

$$K(x) = 0,1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$$

- c)



Lösungsschlüssel

- a) 1 x C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
1 x A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
- b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten
- c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall $[0; 4]$
1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall $[0; 4]$ als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$