

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).

Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.

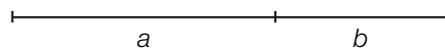


Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

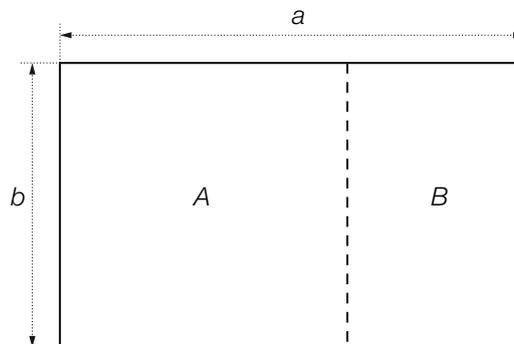


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

- b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

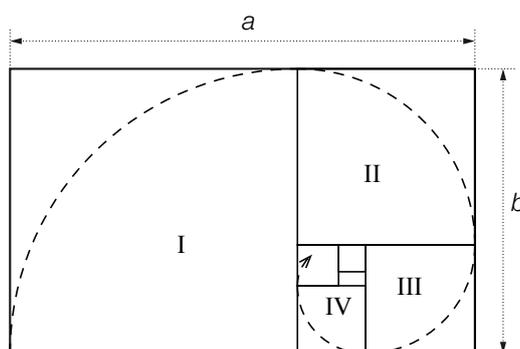


Abbildung 3

- Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks $a = 144$ cm und $b = 89$ cm betragen.
- c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

$x =$ Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
$y =$ Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

- Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
- d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von $d = 10$ Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.
- Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$$a : 1 = (a + 1) : a \Rightarrow a^2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die zweite Lösung $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

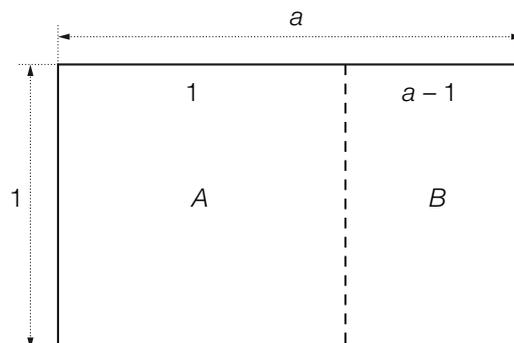
$$a : 1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{a} \Rightarrow a - 1 = \frac{1}{a}$$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

$$\text{Im ursprünglichen Rechteck gilt: } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$$\frac{1}{a-1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{1}{a-1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow 1 = (a-1) \cdot a \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

Diese Gleichung ist für $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_I = 89$, $r_{II} = 144 - 89 = 55$, $r_{III} = 89 - 55 = 34$, $r_{IV} = 55 - 34 = 21$

Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99,5 \cdot \pi \approx 312,59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0,87$ und $n = 5$

$P(X \geq 3) = 0,9820\dots \approx 98,2$ %

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1,5064 \cdot x - 0,2163$ (Parameter gerundet)

d) $d = 25,4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1,6 \Rightarrow h = \frac{b}{1,6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1,6}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1,6}\right)^2}$

Breite $b = 21,539\dots \approx 21,54$ cm

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 5 Stochastik
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) schwer
- b) mittel
- c) leicht
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 2
- d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design*. New York: Princeton Architectural Press 2006.