Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fruchtsaftproduktion*

Aufgabennummer: B_483

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1\,215$$

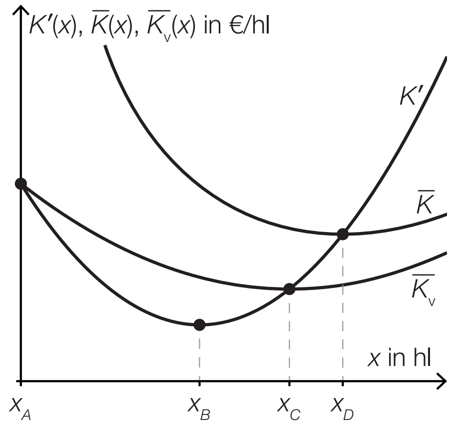
x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Der Koeffizient a muss ______①______ sein, weil der Graph von E ______②______ .

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ *oder* $1\,875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}04$; $b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	☒

②	
nach unten geöffnet ist	☒

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$
oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.
Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

d1) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 29{,}280\ldots \quad (x_2 = -62{,}613\ldots)$

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

d2) $G(x) = \int (-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220)\,\mathrm{d}x = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$

Da $G(0) = -F$, gilt: $G(x) = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215$

d3) $G(x) = 1\,000$ *oder* $-0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215 = 1\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 11{,}565\ldots \quad x_2 = 44{,}950\ldots \quad (x_3 = -106{,}516\ldots)$

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird
d2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion unter Berücksichtigung der Fixkosten
d3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Bereichs