Epidemie*

Aufgabennummer: A_255

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Land breitet sich eine Epidemie aus.

a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.
Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N, die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
- Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

b) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden.

$$I(t) = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$$

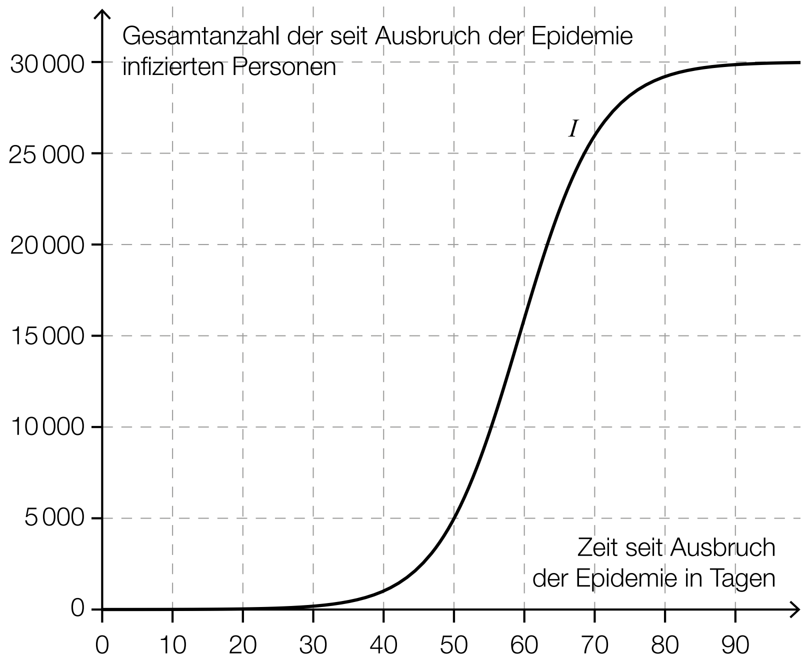
t … Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen
$I(t)$ … Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

Nach 41 Tagen wurden insgesamt 1 200 infizierte Personen registriert.

- Berechnen Sie den Parameter b.
- Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, bei dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie der Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist, mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann, wenn eine Gleichung von I bekannt ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$N_0 = 1$

$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$

$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ *oder* $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$

t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen

$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

b) $1\,200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot 41}}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29\,970{,}0...$

$17\,000 = \frac{30\,000}{1 + 29\,970{,}0... \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60{,}8...$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein.

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ±5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N
1 × D: für die richtige Argumentation

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich [55; 65]
1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)