Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

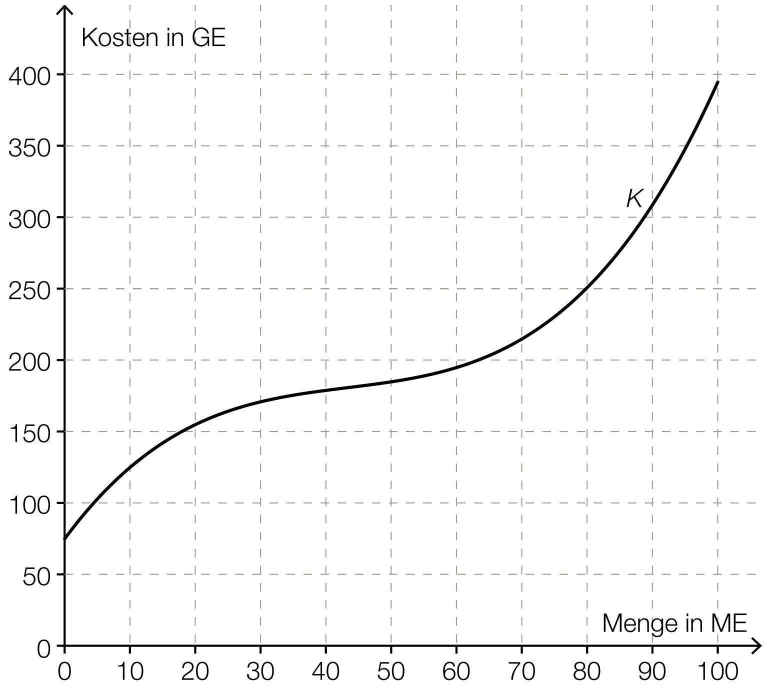
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



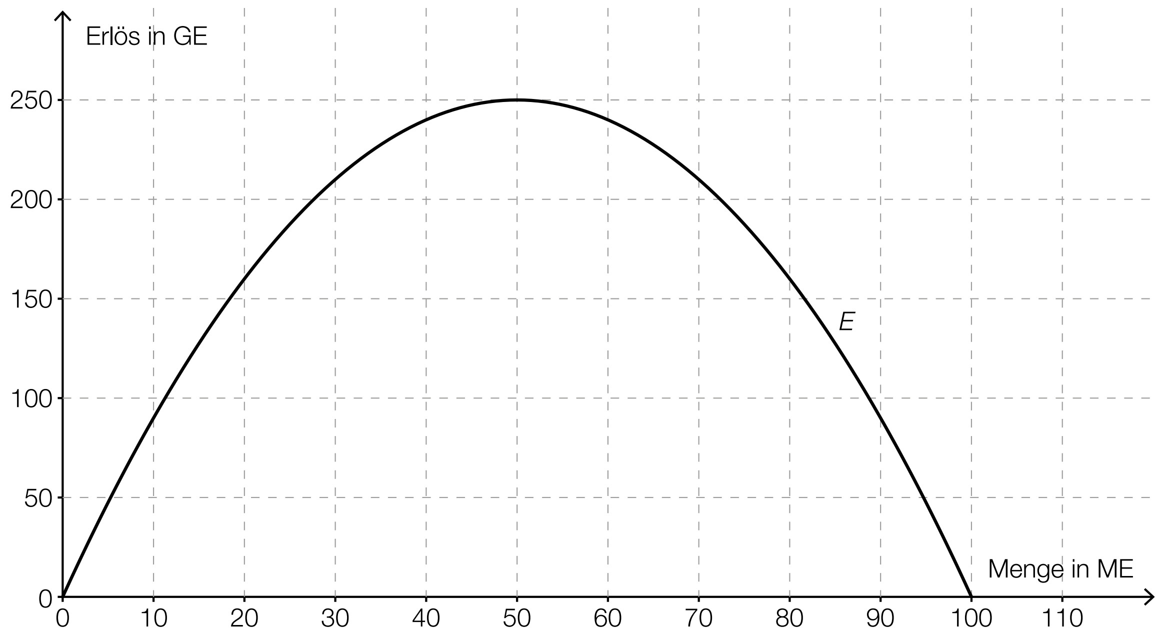
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$
$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

$G(x) = 50$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...$, $x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung