

# Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Aufgabennummer: B\_136

Technologieeinsatz:                      möglich                       erforderlich

Die Gesamtkosten  $K$  für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge  $x$  verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

$x$  ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)  
 $K(x)$  ... Gesamtkosten bei  $x$  ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle  $x = 0$ .
2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.

- a) Nur einer der beiden unten abgebildeten Graphen stellt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dar.
- Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in Abb. 2 keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreibt.
  - Lesen Sie aus dem Graphen der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion die Kostenkehre ab.
  - Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Kostenkehre die Stückkosten an dieser Stelle.

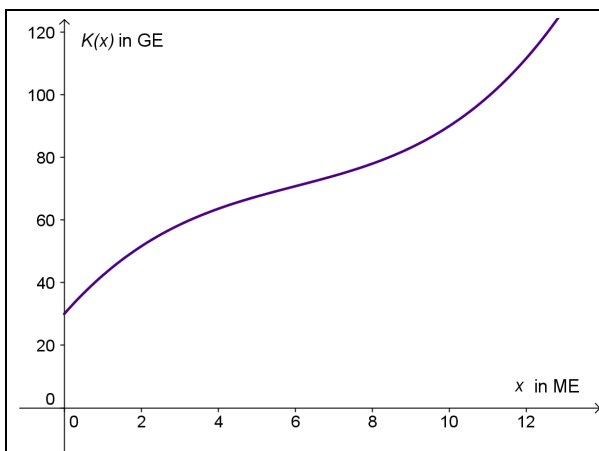


Abb. 1

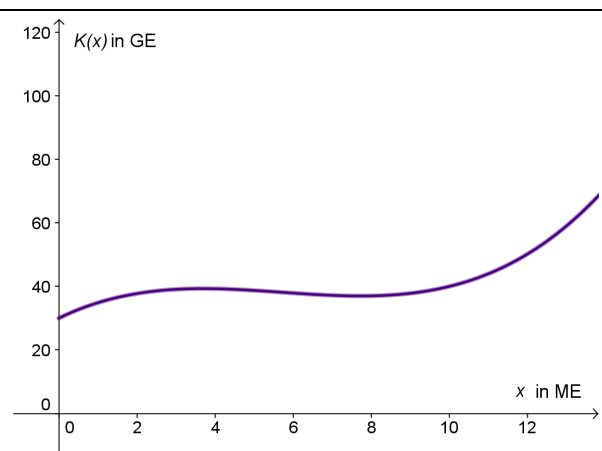


Abb. 2

- b) – Begründen Sie, warum die Funktion  $K$  mit

$$K(x) = 0,1x^3 - 1,6x^2 + 12x + 20$$

die 4 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion erfüllt.

- c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle  $x = 2$  ME einen Anstieg  $k = 5,7$ .

- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

*Hinweis zur Aufgabe:*

*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.*

## Möglicher Lösungsweg

- a) Der Graph in Abb. 2 erfüllt 2 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nicht.  
 Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion hat ein lokales Maximum (bei ca. 4 ME) und ein lokales Minimum (bei ca. 8 ME).  
 Die 3. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion steigt nicht streng monoton. Sie fällt im Bereich von ca. 4 ME bis ca. 8 ME.

Abb.1: Die Kostenkehre liegt bei ca. 6 ME. Toleranzbereich:  $\pm 0,5$  ME.

Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen ca. 70 GE, die Stückkosten an der Kostenkehre betragen daher ungefähr 11,67 GE/ME.

- b)  $K(0) = 20$  ... positiver Funktionswert an der Stelle  $x = 0$   
 $K'(x) = 0,3x^2 - 3,2x + 12 = 0$ , die Gleichung hat keine reelle Lösung.  
 Es existieren keine Extremwerte.

Wenn der Funktionsgraph im gesamten Bereich monoton steigt, dann muss  $K'(x)$  für alle  $x$  größer als null sein.

Der Graph von  $K'$  ist eine nach oben offene Parabel, weil der Koeffizient vor  $x^2$  positiv ist. Weil die Ableitungsfunktion  $K'$  keine Nullstelle hat, sind alle Funktionswerte positiv.

Die Funktion  $K$  steigt daher monoton.

$$K''(x) = 0,6x - 3,2 = 0 \Rightarrow x = 5,33$$

Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten.

$K''(x)$  ist positiv für  $x > 5,33$ , denn  $K'$  ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung.

D. h., das Krümmungsverhalten ist nach der Wendestelle progressiv und vor der Wendestelle daher degressiv.

- c)  $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$   
 $K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$   
 $K''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$K(0) = 25: \quad d = 25$$

$$K(5) = 53,8: \quad 125a + 25b + 5c + d = 53,8$$

$$K'(2) = 5,7: \quad 12a + 4b + c = 5,7$$

$$K''(5) = 0: \quad 30a + 2b = 0$$

## Klassifikation

Teil A             Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 4
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —